Mathematik - aber wie?

Prof. Dr. Manfred Lehn

Liebe Schülerinnen und Schüler, meine sehr geehrten Damen und Herren! [1]

Mathematik ist eine sehr alte Wissenschaft, zusammen mit der Astronomie sicher die älteste. Ihre Anfänge gehen weit zurück in die Zeit der Sumerer und Babylonier, und Pythagoras hat den Inhalt des später nach ihm benannten Satzes vermutlich schon bei seinen Studienreisen in Ägypten kennengelernt.

In der klassischen Antike geschieht aber etwas ganz Neues. Während es in einem ägyptischen Rechenbuch etwa heißt: 'Nimm eine Strecke von $14\frac{2}{3}$ Ellen Länge', schreibt man griechisch: 'Betrachte die Strecke AB'. Während man babylonisch sagte: 'Ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 oder 5, 12 und 13 ist rechtwinklig.' sagt man griechisch: 'In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten das Quadrat über der Hypothenuse.' Das Griechische daran sind natürlich nicht die Vokabeln Kathete und Hypothenuse. Es ist der Übergang vom Zahlenwert zur Variablen, vom Einzelfall zum allgemeinen Fall, von der speziellen Beobachtung zum allgemeinen Satz.

Was sich hier abzeichnet, ist das Entstehen der Theorie, und zwar als bewußter, reflektierter Vorgang. Indem wir theoretisieren, ersetzen wir die Wirklichkeit durch ein Modell der Wirklichkeit. Die Vorteile liegen auf der Hand: Es ist viel einfacher, gedankliche Objekte hin- und herzuschieben, als reale Gegenstände der Welt. Mit dem Entstehen der wissenschaftlichen Theorie als menschlichem Werkzeug explodiert in der Antike zugleich unser Wissen über die Welt. Das *Konzept der Theorie* ist ein Geschenk der griechischen Kultur an uns.

Die Trennung in Theorie und Praxis bringt aber auch Probleme mit sich: Einerseits ist diese Trennung die Voraussetzung für die weitere Entwicklung der technischen und wissenschaftlichen Grundlagen unserer Zivilisation. Andererseits wird es immer schwieriger, die Verbindung zwischen theoretischen Erkenntnissen und der praktischen Anwendung unmittelbar zu sehen. Dieses Problem ist nicht neu. Die folgende Geschichte ist mehr als 2000 Jahre alt.

Zu Euklid, dem Haupt des glänzenden Mathematikerkreises an der Bibliothek in Alexandria kam eines Tages ein junger, der Mathematik beflissener Mann mit der Frage: 'Aber was werde ich gewinnen, wenn ich all diese Dinge lerne?' Der Meister winkte statt einer Antwort seinen Sklaven herbei und hieß ihn, dem jungen Mann einige Goldstücke auszuhändigen: 'Denn er muß Profit aus dem ziehen, was er lernt!'

Die Frage, die der junge Mann gestellt hat, ist sehr modern. Ich höre sie in anderen Worten regelmäßig von meinen Studenten: 'Wozu muß ich wissen, was eine

[1] Vortrag anläßlich der Eröffnung der Sonderausstellung *Mathematik Begreifen* im Museum für Antike Schiffahrt in Mainz am 7. November 2007

Gruppe oder ein Ring ist? In der Schule brauche ich das doch nicht!', und in der einen oder anderen Form geistert sie durch die Debatten über den Schulunterricht.

Die Frage der Nützlichkeit lautet individuell: 'Warum soll ich mich mit Mathematik beschäftigen?' und gesellschaftlich: 'Warum sollen wir Mathematik in der Schule unterrichten? Warum soll die Gesellschaft mathematische Forschung finanzieren?'

Darauf gibt es zwei sich ergänzende Antworten. Die erste ist einfacher und leichter zu verstehen. Deshalb ist die Gefahr groß, bei dieser Antwort zu verweilen und die zweite, in meinen Augen wichtigere Antwort zu übersehen. Es ist besser, wir bringen die erste Antwort hinter uns, wir reißen sie kurz an und schieben sie dann vom Tisch, weil sie uns den Blick auf die zweite Antwort versperrt.

Die erste Antwort lautet: Wir sollen uns mit Mathematik beschäftigen, weil sie ungeheuer nützlich ist, weil unsere gesamte moderne technische Welt ohne Mathematik undenkbar ist, und zwar nicht nur im Bereich der industriellen Produktion, sondern bis in den Alltag hinein: Kein MP3-Spieler ohne Datenkomprimierung mit Wavelet-Methoden, kein CD-Spieler ohne fehlerkorrigierende Codierung, keine Scheckkarte ohne Kryptographie.

Diese Liste ist alles andere als erschöpfend und ließe sich endlos fortsetzen. Aber jede Aufzählung von Anwendungsbeispielen ist eigentlich kontraproduktiv, weil sie kurz bleiben muß, um nicht zu langweilen, und damit die ungeheure Masse an anderen Anwendungen ausblendet. Statt die Universalität der Mathematik zu belegen, besteht die Gefahr, daß sich der Blick zu verkürzt. Eigentlich sollte man ganz forsch sagen: Die Nützlichkeit der Mathematik ist doch so offensichtlich, daß man kurzsichtig sein muß, um die Bedeutung der Mathematik zu verkennen.

So. Und jetzt vom Tisch damit. Wir müssen diese Antwort, die wichtig, aber nur die halbe Wahrheit ist, zur Kenntnis nehmen und dann zu den Akten legen. Wenn wir nämlich bei dieser Antwort stehen bleiben, verleitet sie uns zu einer Reihe von Fehlschlüssen, die wir vermeiden müssen. Wie zum Beispiel den Fehlschluß, der Mathematikunterricht müsse anwendungsorientiert oder alltagsnah sein.

Weniges ist falscher als dies: Auch ich brauche im *Alltag* nicht mehr Mathematik als den Dreisatz und etwas Zinseszins beim Baukredit. Wer im Unterricht anderes zu suggerieren versucht, macht sich und seinen Schülern etwas vor. Aber Schüler merken das natürlich.

Daß mit dem Wunsch nach mehr Alltagsnähe etwas nicht ganz stimmt, bemerkte vor einigen Jahren auch ein Bielefelder Pädagoge und Didaktiker. Nur ersetzte er den einen Fehlschluß durch einen schlimmeren. Er kam zu dem Ergebnis, 'sieben Jahre Mathematikunterricht sind genug' und schlug allen Ernstes vor, Schüler nach der siebten Klasse, in die Kategorien 'Braucht mehr höhere Mathematik' - sprich: 'soll einmal zur ökonomisch-technischen Elite gehören' - und 'Braucht keine Mathematik mehr' einzuteilen. Das Medienecho auf diese alberne These war enorm.

Wenn es nicht um Alltagsnähe und Anwendungen geht, worum dann? Erinnern wir uns, wie Euklid auf die Frage des Studenten reagiert hat: Seine Antwort ist eine Nichtantwort. Statt seine Wissenschaft zu verteidigen, reagiert er mit Ironie und Spott. Vermutlich, weil er die Fragestellung verwarf und weil der Student trotz seinen Studien anscheinend wenig vom Wesen der Mathematik begriffen hatte.

Was ist das Wesen der Mathematik? Von Georg Cantor, dem Mann, der uns die Mengenlehre als Fundament der modernen Mathematik gegeben hat – für manche die Hölle, für die Mathematiker, wie David Hilbert gesagt hat, das Paradies –, der uns gelehrt hat, freihändig mit dem Unendlichen umzugehen, von Georg Cantor stammt der Satz:

Das Wesen der Mathematik liegt in der Freiheit.

Der Begriff Freiheit bezeichnet zunächst die Tatsache, daß alles Mathematisieren damit beginnt, sich von der konkreten Situation zu lösen, abstrakte Zusammenhänge zu sehen, hinter vier Äpfeln und vier Birnen die Zahl 4 wahrzunehmen. Wir suchen das Gemeinsame in allen Gleichungen, in denen die Unbekannte quadratisch vorkommt, und lösen die sozusagen universelle quadratische Gleichung ein für alle Mal und nicht für jede Wahl von Koeffizienten neu. Es ist gerade die Freiheit von der konkreten Anwendung, die der Mathematik umgekehrt ihre universelle Anwendbarkeit verleiht. Freiheit durch Abstraktion!

Mathematische Freiheit erlaubt, Methoden und Werkzeuge nach Gutdünken zu wählen, auszuprobieren und zu verwerfen. Wir können geometrische Begriffe, wie *Winkel*, die *Eigenschaft, senkrecht zu stehen*, oder *Projektion* aus ihrem dreidimensionalen Kontext nehmen und auf höherdimensionale Räume anwenden, sogar auf unendlichdimensionale Räume, und dann Joseph Fourier folgend eine Theorie der Wärmeleitung entwickeln. Wir können diese Theorie der Fouriertransformation dann aus der Analysis in die Algebra transportieren und Arnold Schönhage und Volker Strassen folgend zu einer Methode der sehr schnellen Multiplikation von sehr großen Zahlen weiterentwickeln.

Unserer Freiheit sind Grenzen nur durch unsere Phantasie und unser Können gesetzt. Darauf bezieht sich die bekannte Anekdote, die David Hilbert, aber auch Abraham Kästner, dem Lehrer von Carl-Friedrich Gauß, zugeschrieben wird. Auf die Frage, was denn aus dem Studenten Z geworden sei, sagte er: 'Er ist Dichter geworden, er hatte zuwenig Phantasie.' In der Freiheit, Brücken zwischen völlig separaten Gebieten zu schlagen, liegt die Kraft der Mathematik.

Mathematische Freiheit bedeutet auch, ganz neue Dinge erfinden zu dürfen. Zum Beispiel eine Zahl, deren Quadrat -1 ist, obwohl doch die Schulweisheit sagt, daß minus mal minus plus ist, und plus mal plus sowieso. Man darf auch gekrümmte und 7–dimensionale Räume erfinden. Und zwar, einfach, weil man es will, oder genauer: weil etwas in den Fragen, über die wir nachdenken, uns dazu treibt. Und nicht, weil komplexe Zahlen in der Wechselstromlehre schöne Anwendungen haben oder gekrümmte Mannigfaltigkeiten in der allgemeinen Relativitätstheorie. Mathematische Freiheit ist schöpferisch.

Mathematik lehrt uns, im Möglichkeitsmodus zu denken: 'Nehmen wir einmal an, daß...'. Sie lehrt, Hypothesen zu formulieren und im Möglichkeitsmodus zu Ende zu denken, aus dem Gegebenen herauszutreten und Anderes, Neues zu wagen. Mathematische Freiheit ist innovativ.

Mathematische Freiheit besteht schließlich auch darin, sich mit dem zu beschäftigen, was einen wirklich interessiert. Es ist die Freiheit, stunden- und tagelang, unter Umständen auch jahrelang über ein bestimmtes Problem zu grübeln. Es ist die Freiheit, dicke Bretter zu bohren.

Es ist die Freiheit des Spiels. Und zwar des freien Spiels der Kinder, die ihre Regeln mitten im Spiel ändern und neu erfinden, allein getrieben von der Lust an der Variation und dem Wunsch, das Spiel noch interessanter zu machen.

Und damit auch in diesem Vortrag etwas Mathematik vorkommt, spielen wir jetzt ein bißchen. Und zwar zunächst ein Spiel, das unabhängig voneinander von Lothar Collatz und Stanislaw Ulam erfunden wurde und das als das $3n+1$-Problem bekannt ist.

Wir spielen nach der Regel: Ist n eine natürliche Zahl, so wird sie halbiert, wenn n gerade ist, und durch $3n+1$ ersetzt, wenn sie ungerade ist. Wir wiederholen die Prozedur und sehen nach, was passiert.

Wir fangen klein an: $1 \mapsto 3 \times 1 + 1 = 4 \mapsto 2 \mapsto 1$, und von jetzt an laufen wir in einer Schleife. Dasselbe passiert offenbar, wenn wir mit 2 oder 4 anfangen. Der nächste Fall ist

$$3 \ \mapsto\ 3 \times 3 + 1 = 10 \ \mapsto\ 5 \ \mapsto\ 3 \times 5 + 1 = 16 \ \mapsto\ 8 \ \mapsto\ 4 \ \mapsto\ 2 \ \mapsto\ 1$$

und wieder enden wir in der $1-2-4-$Schleife. Noch ein Beispiel!

$$7 \ \mapsto\ 22 \ \mapsto\ 11 \ \mapsto\ 34 \ \mapsto\ 17 \ \mapsto\ 52 \ \mapsto\ 26 \ \mapsto\ 13 \ \mapsto\ 40 \ \mapsto\ 20 \ \mapsto\ 10 \ \mapsto\ 5 ...$$

und weiter wie vorher: Wieder landen wir bei der 1.

Hier drängen sich sofort viele Fragen auf: Ist das immer so? Oder kann es passieren, daß man nach ein paar Schritten wieder bei der Ausgangszahl landet? Gibt es also vielleicht noch andere Schleifen als $1-2-4$? Oder kann es passieren, daß wir überhaupt nicht mehr zurückkommen und daß die Zahlen letztlich immer größer werden?

Und hier kommt ein ganz anderes Spiel. Statt die Regeln zu erklären, rechne ich Ihnen einmal etwas vor:

$$3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2187$$

und dann

$$3^7 - 3 = 2187 - 3 = 2184 = 7 \times 312$$

und stellen fest: Das Ergebnis ist durch 7 teilbar. Noch ein Beispiel

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$$

und

$$2^7 - 2 = 128 - 2 = 126 = 7 \times 18.$$

Und noch eins:

$$4^7 - 4 = 128 \times 128 - 4 = 16380 = 7 \times 2340.$$

Andererseits ist

$$2^9 - 2 = 128 \times 2 \times 2 - 2 = 512 - 2 = 510$$

nicht durch 9 teilbar, wie der Quersummentest uns sofort zeigt. Warum funktioniert der Trick bei 7, aber nicht bei 9? Gibt es eine Regel, oder sind dies einfach zufällige Rechnungen?

Und jetzt frage ich das Publikum — nicht, wer eine Idee hat, was herauskommen könnte, sondern: Wer von Ihnen findet diese Spiele interessant? Wer von Ihnen hat sich insgeheim gefragt, wozu das gut sein soll? Gegenprobe: Wer hört gar nicht mehr zu?

Nun, das Collatz-Ulam Problem ist offen. Keiner weiß, was passiert. Und das ist doch spannend! Man kann spekulieren, ob es jemals Anwendungen dafür gibt. Dagegen war vor dreihundert Jahren das zweite Problem verstanden. Die Lösung wird durch den Satz von Fermat und Euler gegeben. Aber bis vor kurzem war das einfach ein wunderbarer Satz. Die Anwendungen in der Kryptographie sind allerjüngster Natur. Ohne die rein neugiergetriebenen Arbeiten von Fermat und Euler würde es die Anwendungen aber nicht geben.

Der Versuch, Mathematik an der Universität zu lehren oder in der Schule zu unterrichten, scheitert, wenn die schöpferische und innovative Kraft, die in der mathematischen Freiheit liegt, nicht deutlich wird. Man darf die Mathematik nicht gegen den Strich bürsten.

Mathematikunterricht muß den Spagat zwischen der Vermittlung eines unvermeidlichen Kanons und der Anleitung zu kreativer Freiheit und schöpferischer Innovation schaffen. Dies sind Lernziele jenseits der Alltagsnähe und der Anwendung. Das setzt beim Lehrer eine hohe mathematische Bildung und Souveränität voraus, aber auch, daß das System ihm Freiheiten beläßt.

Wir leben in einer Zeit ständig zunehmender Beschneidung von Freiheiten. Die Stichworte sind für die Schule: Zentralabitur, Vergleichsstudien, Vergleichsarbeiten, Lehrplan, zu große Klassen. Für die Universität: Permanente Studienreform, Curriculare Standards, Modularisierung, Akkreditierung, Evaluierung, massive studentische Arbeitsbelastung und hohe Lehrbelastung, zu große Klassen; und alles verbunden mit ständig wachsendem administrativem Leerlauf und der Produktion von viel Papier. Denn was bringt Evaluierung? Um es einmal in Worten aus meiner nordhessischen Heimat zu sagen: 'Die Sau muß auch gefüttert werden. Vom Wiegen allein wird sie nicht fett.'

In dieser Ausstellung werden in den nächsten Wochen viele Kinder die Freiheit haben, fern von Lehrplan und Notendruck zu spielen und spielerisch Mathematik zu erfahren. Sie werden manches lernen, aber vor allem viel lachen, viel Lärm machen und viel Spaß haben. Das wünschen wir dem Museum, den Organisatoren der Ausstellung und allen Besuchern.